Репер $\widetilde{R}(\Lambda_i, N_\alpha)$, для которого выполняются равенства (22) и (24), характеризуется тем, что векторы Λ_u репера $R(\Lambda_i, N_\alpha)$ помещены в подпространство ξ_x, причем векторы Λ_σ принадлежат подпространству B_x.

Условия инволютивности (20) и (2I) распределений ξ и B в репере $\widetilde{R}(\Lambda_i, N_\alpha)$ имеют соответственно вид:

$$\xi^i_{m+u\,v} - \xi^i_{m+v\,u} = 0, \qquad (20)$$

$$(\xi^u_{m+\tau\sigma} - \xi^u_{m+\sigma\tau}) + (\nu^{m+u}_{m+\sigma\tau} - \nu^{m+u}_{m+\tau\sigma}) = 0, \quad \xi^a_{m+\tau\sigma} - \xi^a_{m+\sigma\tau} = 0. \qquad (2I)$$

Плоскость ν_x переносится параллельно в вертикальной связности $\overset{*}{\gamma}$ при смещении точки $x \in M_m$ по кривым, принадлежащим распределению B, если в репере $\widetilde{R}(\Lambda_i, N_\alpha)$ выполняются соотношения:

$$\nu^\alpha_{\alpha,\sigma} = 0. \qquad (25)$$

Так как по условию теоремы выполнены соотношения (20) и (25), то выполнены также и соотношения (2I), т.е. распределение B инволютивно.

Библиографический список

I. Л а п т е в Г.Ф. Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности // Докл. АН СССР. I959. Т. I26, №3. С. 490–493.

2. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. $(f\,\xi\,\eta\,\rho)$-структура на дифференцируемом многообразии // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., I975. Т. 7. С. 5–22.

3. Остиану Н.М., Домбровский Р.Ф., Поляков Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. II. Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., I982. Т. I3. С. 27–76.

4. О с т и а н у Н.М. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. У. CR-подмногообразия в многообразии почти комплексной структуры // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., I987. Т. I9. С. 59–I00.

УДК 514.76

ОБ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ Т-СВЯЗНОСТИ

А.К. Р ы б н и к о в

(Московский ун-т)

В настоящей работе продолжено изучение дифференциально-геометрических структур, ассоциированных с совокупностью аффинных связностей, получаемых друг из друга путем так называемых Т-преобразований (см. [I]), соответствующих тензорному полю T^{im}_{jk} ($T^{im}_{jk} = T^{im}_{kj}$, $T^{tm}_{tk} = 0$). Класс Т-преобразований довольно широк: в нем, в частности, содержатся проективные, конформные, некоторые почти проективные преобразования связностей. Ранее [1] мы изучали структуры (Т-связности), при рассмотрении которых требовалась симметрия тензора T^{im}_{jk} не только по нижним, но также по верхним индексам. В этой работе указан способ обобщения понятия Т-связности, при котором можно отказаться от симметрии тензора T^{im}_{jk} по верхним индексам и расширить, таким образом, круг изучаемых структур.

I. При преобразовании аффинных связностей (без кручения), определенных на многообразии M_n, происходит преобразование проективных нормалей, определенных заданием объекта Π^i_{jk} ($i, j, k = 1, \dots, n$), и преобразование касательных оснащений, определенных заданием объекта π_j [2]. Снабдив проективные нормали оснащениями (оснащенные проективные нормали определяются заданием расширенного объекта Π^i_{jk}, Π^0_{jk}), получим структуру, которую назовем дополненной аффинной связностью. В дополненной аффинной связности содержится аффинная связность, определенная объектом (Π^i_{jk}, π_j). Будем рассматривать преобразования дополненной аффинной связности, при которых изменение оснащенных проективных нормалей и касательных оснащений происходит согласованно, причем тензор деформации оснащенных проективных нормалей с компонентами N^i_{jk}, N^0_{jk} ($N^i_{jk} = \widetilde{\Pi}^i_{jk} - \Pi^i_{jk}$, $N^0_{jk} = \widetilde{\Pi}^0_{jk} - \Pi^0_{jk}$) и ковектор P_j ($P_j = \widetilde{\pi}_j - \pi_j$), определяющий преобразование касательных оснащений, связаны соотношениями $N^i_{jk} = T^{im}_{jk} P_m$, $N^0_{jk} = T^{0m}_{jk} P_m$. Такие преобразования дополненной аффинной связности будем называть Т-преобразованиями.

Коэффициенты T^{im}_{jk} ($T^{im}_{jk} = T^{im}_{kj}$, $T^{tm}_{tk} = 0$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dT^{im}_{jk} + T^{tm}_{jk}\theta^i_t + T^{it}_{jk}\theta^m_t - T^{im}_{tk}\theta^t_j - T^{im}_{jt}\theta^t_k = T^{im}_{jk,\ell}\theta^\ell_0,$$

где $\theta^{\hat{\imath}}_0, \theta^{\hat{\imath}}_j, \theta^{\hat{\imath}}_{jk}, \dots$ ($\hat{\imath}=0,\hat{1},\dots,n$) – структурные формы в расслоениях проективных реперов, т.е. в главных расслоениях проективной структуры, построенных над M_n как над базой [3]. Коэффициенты T^{0m}_{jk} ($T^{0m}_{jk}=T^{0m}_{kj}$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dT^{0m}_{jk} + T^{tm}_{jk}\theta^0_t + T^{0t}_{jk}\theta^m_t - T^{0m}_{tk}\theta^t_j - T^{0m}_{jt}\theta^t_k + T^{0m}_{jk}\theta^0_0 = T^{0m}_{jk,\ell}\theta^\ell_0.$$

Объект с компонентами T^{im}_{jk} является тензором, а расширенный объект $(T^{im}_{jk}, T^{0m}_{jk})$ проективным тензором, содержащим подтензор с компонентами T^{im}_{jk}.

Величины $q^i_{jk}=\Pi^i_{jk}-T^{im}_{jk}\pi_m$, $q^0_{jk}=\Pi^0_{jk}-T^{0m}_{jk}\pi_m$ не изменяются при Т-преобразованиях дополненной аффинной связности. Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dq^i_{jk}+q^m_{jk}\theta^i_m - q^i_{mk}\theta^m_j - q^i_{jm}\theta^m_k + q^i_{jk}\theta^0_0 - \theta^i_{jk} + T^{im}_{jk}\theta^0_m = q^i_{jk,\ell}\theta^\ell_0,$$

$$dq^0_{jk}+q^m_{jk}\theta^0_m - q^0_{mk}\theta^m_j - q^0_{jm}\theta^m_k + 2q^0_{jk}\theta^0_0 - \theta^0_{jk} + T^{0m}_{jk}\theta^0_m = q^0_{jk,\ell}\theta^\ell_0.$$

2. С совокупностью дополненных аффинных связностей, получаемых друг из друга с помощью Т-преобразований, ассоциируется дифференциально-геометрическая структура специального типа. Эту структуру, определяемую заданием объекта с компонентами T^{im}_{jk}, T^{0m}_{jk}, q^i_{jk}, q^0_{jk}, мы назовем обобщенной Т-связностью в отличие от рассматривавшейся нами ранее [1] структуры, ассоциированной с совокупностью аффинных связностей (не дополненных), связанных преобразованиями такими, что $N^i_{jk}=T^{im}_{jk}P_m$, которую мы называли Т-связностью. При рассмотрении (обычных) Т-связностей мы были вынуждены требовать симметрии тензора T^{im}_{jk} не только по нижним, но также по верхним индексам. Для обобщенных Т-связностей симметрия T^{im}_{jk} по верхним индексам не обязательна.

Введем формы $\tilde\theta^i_j = \theta^i_j + q^i_{jk}\theta^k_0$, $\tilde\theta^0_j=\theta^0_j+q^0_{jk}\theta^k_0$. Можно убедиться в том, что

$$\begin{cases}\mathcal{D}\theta^i_0 = \theta^0_0\wedge\theta^i_0 + \theta^k_0\wedge\tilde\theta^i_k,\\ \mathcal{D}\theta^0_0 = \theta^k_0\wedge\tilde\theta^0_k,\\ \mathcal{D}\tilde\theta^i_j = \tilde\theta^0_j\wedge\theta^i_0 + \tilde\theta^m_j\wedge\tilde\theta^i_m - T^{im}_{jk}\tilde\theta^0_m\wedge\theta^k_0 + R^i_{jk\ell}\theta^k_0\wedge\theta^\ell_0,\\ \mathcal{D}\tilde\theta^0_j = \tilde\theta^0_j\wedge\theta^0_0 + \tilde\theta^m_j\wedge\tilde\theta^0_m - T^{0m}_{jk}\tilde\theta^0_m\wedge\theta^k_0 + R^0_{jk\ell}\theta^k_0\wedge\theta^\ell_0,\end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

где

$$\begin{cases}R^i_{jk\ell} = -\frac12\left(q^i_{j[k,\ell]} + q^m_{j[k}q^i_{\ell]m} + q^0_{j[k}\delta^i_{\ell]} + T^{im}_{j[k}q^0_{\ell]m}\right),\\ R^0_{jk\ell} = -\frac12\left(q^0_{j[k,\ell]} + q^m_{j[k}q^0_{\ell]m} + T^{0m}_{j[k}q^0_{\ell]m}\right).\end{cases} \qquad (2)$$

При этом $R^m_{mk\ell}=0$, $R^i_{[jk\ell]}=0$, $R^0_{[jk\ell]}=0$. Формы $\tilde\theta^i_j, \tilde\theta^0_j$ будем называть структурными формами, а уравнения (I) структурными уравнениями обобщенной Т-связности.

Рассматривая дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют $R^i_{jk\ell}$ и $R^0_{jk\ell}$, мы видим, что в случае, если будет выполнено условие

$$T^{im}_{j[k,\ell]} + T^{tm}_{j[k}q^i_{\ell]t} + q^t_{j[k}T^{im}_{\ell]t} + T^{it}_{j[k}q^m_{\ell]t} + T^{0m}_{j[k}\delta^i_{\ell]} + T^{it}_{j[k}T^{0m}_{\ell]t} = 0, \qquad (3)$$

величины $R^i_{jk\ell}$ превратятся в компоненты тензора, а также, что объект с компонентами $R^i_{jk\ell}, R^0_{jk\ell}$ будет проективным тензором (содержащим подтензор с компонентами $R^i_{jk\ell}$), если, в дополнение к условию (3), будет выполнено условие

$$T^{0m}_{j[k,\ell]} + T^{tm}_{j[k}q^0_{\ell]t} + q^t_{j[k}T^{0m}_{\ell]t} + T^{0t}_{j[k}q^m_{\ell]t} + T^{0t}_{j[k}T^{0m}_{\ell]t} = 0.$$

Тензор $R^i_{jk\ell}$ мы условимся называть тензором кривизны, а проективный тензор с компонентами $R^i_{jk\ell}, R^0_{jk\ell}$ – расширенным тензором кривизны обобщенной Т-связности.

Наложим на тензор T^{im}_{jk} дополнительное условие, потребовав, чтобы

$$\det\|\tau^{uv}_{jk}\|\neq 0, \qquad (4)$$

где $\tau^{uv}_{jk}=\frac12\left(T^{(uv)}_{jk} + (n-1)\delta^u_{(j}\delta^v_{k)}\right)$.

Если в (3) мы произведем свертывание по i и ℓ, то придем к соотношениям, из которых следует

$$T^{0m}_{jk} = -\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{jk}\left(T^{sm}_{uv,s} - T^{sm}_{tu}q^t_{vs} - T^{sm}_{tv}q^t_{us} + T^{st}_{uv}q^m_{st}\right),$$

где $\|\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{jk}\| = \|\tau^{uv}_{jk}\|^{-1}$.

Еще одно важное соотношение можно получить в результате свертывания по i и ℓ в первом из уравнений (2) и последующего разрешения относительно q^0_{jk} :

$$q^{o}_{jk} = \overset{*}{\tau}{}^{uv}_{jk}\left(q^{m}_{tu}\, q^{t}_{vm} - q^{m}_{uv,m} - 2R^{m}_{uvm}\right).$$

Справедливо следующее

П р е д л о ж е н и е. В случае, когда тензор T^{im}_{jk} удовлетворяет условию (4) и, кроме того, условию

$$T^{tm}_{j[k} T^{ia}_{l]t} + T^{ta}_{j[k} T^{im}_{l]t} - T^{am}_{j[k}\delta^{i}_{l]} - T^{ma}_{j[k}\delta^{i}_{l]} + (n-1)T^{im}_{j[k}\delta^{a}_{l]} + \tag{5}$$

$$+ (n-1)T^{ia}_{j[k}\delta^{m}_{l]} + n\,\delta^{m}_{j}\delta^{a}_{[k}\delta^{i}_{l]} + n\,\delta^{a}_{j}\delta^{m}_{[k}\delta^{i}_{l]} +$$

$$+ \left(\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{j[k}\delta^{i}_{l]} + T^{iq}_{j[k}\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{l]q}\right)\left(T^{sm}_{t(u} T^{ta}_{v)s} - n(n-1)\delta^{m}_{(u}\delta^{a}_{v)}\right) = 0,$$

а его ковариантные производные $T^{im}_{jk|l}$ по отношению к одной из аффинных связностей, определенных на многообразии, удовлетворяют условиям

$$T^{im}_{j[k|l]} - \left(\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{j[k}\delta^{i}_{l]} + T^{it}_{j[k}\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{l]t}\right)T^{sm}_{uv|s} = 0, \tag{6}$$

то имеют место соотношения (3) (и, следовательно, величины R^{i}_{jkl} являются компонентами тензора).

3. Наиболее интересный подкласс обобщенных Т-связностей представляют нормальные обобщенные Т-связности, которые удовлетворяют условию $R^{m}_{jkm} = 0$ (одновременно предполагается, что имеют место условия (5) и (6)). Для нормальных обобщенных Т-связностей

$$q^{o}_{jk} = \overset{*}{\tau}{}^{uv}_{jk}\left(q^{m}_{tu}\, q^{t}_{vm} - q^{m}_{uv,m}\right).$$

Нормальная обобщенная Т-связность полностью определяется заданием объекта $(T^{im}_{jk}, q^{i}_{jk})$ и, следовательно, может быть ассоциирована (подобно нормальной Т-связности, которую мы рассматривали ранее [1]) с совокупностью аффинных связностей без кручения, получаемых друг из друга с помощью Т-преобразований (при соответствующих дополнительных условиях). Для любой такой аффинной связности можно построить следующий тензор R^{i}_{jkl}, который мы будем называть тензором Т-кривизны:

$$R^{i}_{jkl} = K^{i}_{jkl} + \frac{1}{n+1}\delta^{i}_{j}K_{[kl]} - \frac{1}{2(n+1)}\left(K_{j[k}\delta^{i}_{l]} + \delta^{i}_{[k}K_{l]j}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2(n+1)}\left(T^{ia}_{j[k}K_{l]a} + K_{a[k}T^{ia}_{l]j}\right) - \frac{1}{2}\left(T^{ia}_{j[k}\delta^{b}_{l]} + \delta^{a}_{j}\delta^{b}_{[k}\delta^{i}_{l]}\right)\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{ab}\left(K_{(uv)} + \frac{2}{n+1}T^{st}_{uv}K_{[st]}\right),$$

где K^{i}_{jkl} – тензор кривизны аффинной связности, K_{jk} – тензор Риччи (здесь исправлена неточность в последнем слагаемом, которая была допущена в [4]).

Имеет место следующая теорема, из которой следует инвариантность тензора Т-кривизны относительно Т-преобразований аффинной связности.

Т е о р е м а. Для всех аффинных связностей без кручения, которым соответствует общая нормальная обобщенная Т-связность, тензор Т-кривизны – один и тот же и совпадает с тензором кривизны нормальной обобщенной Т-связности.

Библиографический список

1. Р ы б н и к о в А.К. Об одном специальном типе дифференциально-геометрических структур (Т-связности)//Всесоюзная конференция по геометрии "в целом": Тез.докл.Новосибирск, 1987. С. 106.

2. Р ы б н и к о в А.К. Проективные и конформные нормали и связности//Изв.вузов.Математика. 1986. №1. С. 60–69.

3. Л а п т е в Г.Ф. Основные дифференциальные структуры на гладком многообразии//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М., 1966. Т. I. С. 139–189.

4. Р ы б н и к о в А.К. Обобщенные Т-связности//Всесоюзная геометр. конф.: Тез.сообщений. Кишинев, 1988. С. 273–274.

УДК 514.75

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ГРАФИКА ОДНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

А.А.Р ы л о в
(МГПИ им.В.И.Ленина)

В работе рассматриваются случаи частичного отображения p-мерных поверхностей, погруженных в евклидовы пространства E_n и $\bar{E}_n$, когда график отображения несет геодезические специального вида или допускает параллельное перенесение единичного векторного поля в нормальной связности по любому направлению.

1. В собственно евклидовом пространстве E_{2n} рассмотрим две вполне ортогональные евклидовы плоскости E_n и $\bar{E}_n$, имеющие общую точку O. Пусть V_p и $\bar{V}_p$ – гладкие поверхности в E_n и $\bar{E}_n$ соответственно. Диффеоморфизму f области $\Omega \subset V_p$ на область